ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА НА РЫНКЕ ДЕНЕГ

Бейсенби М.А.[1], Кисикова Н.М.[2], Абдиханов А.А.[3]

[1]Бейсенби Мамырбек Аукебаевич – доктор технических наук, профессор;
[2]Кисикова Нургул Мырзабековна – кандидат физико-математических наук, доцент;
[3]Абдиханов Адил Алмасович – магистрант,
кафедра системного анализа и управления, факультет информационных технологий,
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан

Из экономической истории известны периоды колебаний и флуктуаций макроэкономических показателей, во время которых рыночные механизмы оказывались неустойчивыми [1, 2]. Неустойчивость рыночных механизмов можно попытаться объяснить несоответствием сложившихся рыночных механизмов макроэкономической политики [2]. Таким образом, возникает задача исследования влияния макроэкономической политики на устойчивость состояния равновесия рыночных механизмов. Неустойчивость рыночных механизмов объясняется проводимой государством денежно-кредитной, фискальной и инвестиционной политикой, а также другими факторами [1, 2].

Пусть макроэкономическая модель равновесия рыночных процессов описывается системой дифференциальных уравнений.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{\left(N_D(v) - N_S(v)\right)}{N_S(v)} v, \qquad (1)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{T_2} \cdot \frac{\left(I(r) - S(Y)\right)}{S(Y)} r, \qquad (2)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\left(\theta Y + M_{2D}(r) - M_0\right)}{M_0} p, \qquad (3)$$

где $Y(v, r, p)$-валовой внутренний продукт (ВВП); S-сбережения; I-инвестиции; N_D и N_S-соответственно спрос и предложение на рабочую силу; v-реальная заработная плата; r-норма банковского процента; p-показатель уровня цен; θ-величина обратная количеству оборотов денежной единицы в год; M_{2D}-спекулятивный спрос денег на ликвидность; $M_0(v, r, p)$-предложение денег на рынке; T_1, T_2 и T_3-соответственно постоянные времени рынка труда, денег и товаров, т.е. параметры имеющие размерность 1/ время.

Уравнение (1) выражает зависимость реальной заработной платы от спроса и предложения рабочей силы на рынке труда; (2) - колебание нормы процента, определяемое соотношением спроса на инвестиции и предложения капитала со стороны населения, государства и иностранных инвесторов. В (3) зафиксирован закон изменения уровня цен. Если количество денег больше, чем требуется для нормального оборота, то цена товаров повышается, так как деньги «дешевеют».

Предполагая в (1) - (3) уровень реальной заработанной платы v и уровень цен на рынке товаров p фиксированные, получим нелинейное уравнение относительно величины кредитных ставок r:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{T} r \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} r\right), \qquad (4)$$

где $\alpha -$ характеризует истинную скорость роста кредитных ставок; $\dfrac{\alpha}{\gamma} -$ характеризует асимптотические равновесный уровень кредитных ставок.

Логистическое уравнения (3) при $\Delta t = 1$ можно представит в виде одномерного отображения.

$$r_{n+1} = \left(1 + \frac{\alpha}{T}\right) r_n \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} r_n\right), (5)$$

Рассмотрим квадратичное отображение $\varphi : R \to R,$ где $\varphi(r, \alpha, \gamma, T) = \dfrac{T+\alpha}{T} r \left(1 - \dfrac{\gamma}{\alpha} r\right) = \dfrac{T+\alpha}{T} \cdot \dfrac{\gamma}{\alpha} r \left(\dfrac{\alpha}{\gamma} - r\right)$, $T > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$.

Данное квадратичное отображение при $\frac{\gamma}{\alpha} \neq 1$ зависит от параметров $\alpha,\ \gamma,\ T$. Нас будет интересовать поведение функций $\varphi(r,\alpha,\gamma,T)$ на отрезке $[0, \alpha/\gamma]$. Графики всех этих функций пересекают ось абсцисс в точках x=0, x=$\frac{\alpha}{\gamma}$. Глобальный максимум функций $y=\varphi(r,\alpha,\gamma,T)$ достигается в точке $r=\frac{\alpha}{2\gamma}:\ \max\limits_{x\in R} \varphi(r,\alpha,\gamma,T)=\frac{T+\alpha}{T}\cdot\frac{\alpha}{4\gamma}$. Будем исследовать неподвижные точки отображения $\varphi^k, k\geq 1$, где $\varphi^k=\varphi\left(\varphi^{k-1}\right), \varphi^0=I-$ тождественное отображения.

Сначала рассмотрим случай к=1. Из соотношения $r=\varphi(r,\alpha,\gamma,T)$ имеем $r\left(1-\frac{T+\alpha}{T}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-r\right)\right)=0$, откуда $r_1=0$, $r_2=\frac{\alpha}{T+\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}$.

Таким образом точки $r_1,\ r_2$ являются неподвижными точками оператора φ, а следовательно неподвижные точки оператора φ^k для всех $k\geq 1$. Кроме того из $\varphi\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=0$ и $\varphi(0)$ следует, что $\varphi\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=0,\ \ \forall k\geq 1$. Так как $\varphi(r,\alpha,\gamma,T)<0$ при r <0 и $r>\frac{\alpha}{\gamma}$. Поэтому при $r\geq\frac{\alpha}{\gamma}$ не может быть неподвижная точка оператора φ^k для всех $k\geq 1$.

Для случая r <0. Из условий $\varphi'(r,\alpha,\gamma,T)=\frac{T+\alpha}{T}\left(1-\frac{2\gamma}{\alpha}r\right)>0$ при всех $r<\frac{\alpha}{2\gamma}$ следует, что функция φ строго возрастает на интервале $\left(-\infty,\frac{\alpha}{2\gamma}\right)$, причем $r>\varphi(r,\alpha,\gamma,T)$ при любом r <0. Поэтому $r>\varphi(r)>\varphi^k(r),\ \ \forall k>1$ и при любом r <0, т.е. φ^k не имеет неподвижной точки при r <0.

Функция φ на отрезке $\left[0,\frac{\alpha}{2\gamma}\right]$ возрастает от нуля до максимального значения $\frac{T+\alpha}{T}\cdot\frac{\alpha}{4\gamma}$ и на отрезке $\left[\frac{\alpha}{2\gamma},\frac{\alpha}{\gamma}\right]$ убывает от $\frac{T+\alpha}{T}\cdot\frac{\alpha}{4\gamma}$ до нуля.

Поэтому для исследования неподвижных точек функций $\varphi^k, k>1$ важно узнать соотношения величины $\varphi(r_{\max},\alpha,\gamma,T)=\frac{T+\alpha}{T}\cdot\frac{\alpha}{4\gamma}$ и $r_{\max}=\frac{\alpha}{2\gamma}$.

График функции y=x пересекает график функции $\varphi^k(r)$ только в точках $r_1=0$, $r_2=\frac{\alpha}{T+\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}$.

Исследуем наличие неподвижной точки функции $\varphi^2(r)=\varphi(\varphi(r))$.

Новыми неподвижными точками функции $\varphi^2(r)=\varphi(\varphi(r))$ являются корни квадратного уравнения

$r^2+ar+b=0$,

$$r_{3,4}=\frac{\alpha}{2\gamma}\cdot\frac{2T+\alpha}{T+\alpha}\cdot\left(1\mp\sqrt{\frac{\alpha-2T}{\alpha+2T}}\right).$$

Заметим, что при $\alpha=2T$ три неподвижные точки совпадают $r_2=r_3=r_4=\frac{\alpha}{T+\alpha}.\frac{\alpha}{\gamma}$.

При $\alpha \geq 3T$ функция $\varphi^k(r),\ k > 1$ имеют 2^k неподвижных точек.

Если для одномерного ограниченного отображения во всей области значений x выполнено неравенство $|d\varphi / dr| > 1$, то такое отображение обладает свойством неустойчивости: близкие точки под действием преобразования φ расходятся экспоненциально быстро, оставаясь в пределах конечного интервала. Следовательно, динамика такого отображения во многом аналогична динамике системы со странным аттрактором [2,3].

При $\alpha \cong 2T$ произошло удвоение цикла – из цикла первого порядка возник цикл второго порядка, причем свойство притяжения перешло к этому новому циклу, такие значения параметра α - называется точками бифуркации.

Что происходит при дальнейшем росте параметра α? Здесь необходимо рассматривать уже три функции $\varphi(r)$, $\varphi^2(r)$ и $\varphi^4(r)$. Последняя из этих функций является (по x) многочленом 8-й степени. Ее неподвижными точками до значения параметра $\alpha \leq \sqrt{6}T$ являются только четыре неподвижные точки функции $\varphi^2(r)$. При $\alpha = \sqrt{6}T$, производные функции $\varphi^2(r)$ в точках r_1, r_2, r_3 и r_4 становятся равными -1 и при дальнейшем росте α вблизи каждой из них возникают пары неподвижных точек функции $\varphi^4(r)$. Для функции $\varphi^2(r)$ эти точки образуют два устойчивых цикла второго порядка, а для функции $\varphi(r)$ - устойчивый цикл четвертого порядка. При α >(2,54…)T этот цикл становится неустойчивым.

При $\alpha < \alpha_\infty$ отображение имеет единственный устойчивый цикл периода 2^n, который, кроме множества меры нуль, притягивает все точки из отрезка $\left[0, \frac{\alpha}{\gamma}\right]$.

Последовательность значений α_n, при которых наблюдаются бифуркации удвоения периода, удовлетворяет простому закону

$$\lim_{n\to\infty}\left[(\alpha_n - \alpha_{n-1})/(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\right] = \delta = 4{,}6692...$$

Число δ является универсальной постоянной Фейгенбаума. Оно показывает, что последовательность бифуркаций удвоения является универсальной.

Из вышепроведенного анализа модели развития кредитных ставок следует, что кредитные ставки и экономическая система в целом развиваются без колебании до тех пор, пока выполняется условие $\alpha \leq 2T$. При определенных соотношениях между значениями скорости роста основных фондов α: $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n < ...$, и постоянной времени T интервал ($2T < \alpha < \alpha_\infty$ =T*2,5699…) соответствует бесконечной последовательности бифуркаций, каждое из которых приводит к циклам более высокого порядка с периодом, удваивающимся при каждой последовательной бифуркации. Значения α_n скапливаются возле некоторого особого значения α_∞, после чего получаются орбиты с «бесконечным периодом», т.е. с ярко выраженным хаотическим поведением. В конечном счете, все пространство состояний динамической системы определяемые площадью четырехугольника шириной $\frac{T+\alpha}{4T} \cdot \frac{\alpha}{\gamma}$ и длиной $\frac{\alpha}{\gamma}$ оказывается принадлежащим единственному хаотическому аттрактору, характеризуемому неустойчивостью и чувствительностью к начальным условиям. В итоге это и объясняет происходящие в экономической системе краткосрочные колебания и флуктуации.

Список литературы

1. *Макконелл Кэмпбелл Р., Брю Стэнли Л.* Экономикс: Принципы, проблемы и политика. В 2 томах: Пер. с англ. Т. 1, 2. Таллин, 1993. 400 с.
2. *Мэнкью Грегори Н.* Принципы экономикс. СПб: Питер, 2002. 496 с.
3. *Николис Г. Пригожин И.* Познание сложного. М. Мир, 1990. 342 с.
4. *Постон Т. Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.

5. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. В 2 томах. Т. 1. М.: Мир, 1984. 301 с.
6. *Lorenz H.V.* Nonlinear Dynamical Equation and Chaotic economy. Springer. Berlin, 1993. P. 234-247.
7. *Бейсенби М.А.* Модели и методы системного анализа и управление детерминированным хаосом в экономике. Астана, 2011. 201 с.
8. *Рассел Д.* Теория хаоса. М.: Изд. «VSD», 2012. 110 с.