УРАВНЕНИЕ РАЗВЕТВЛЕНИЯ С СИММЕТРИЕЙ ПЛОСКИХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУПП

Нормуминов Б.А.

Нормуминов Баходир Ашурович - ассистент,
кафедра высшей математики,
Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства,
г Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *уравнение разветвления (УР) в теории ветвления решений нелинейных уравнений эквивалентно [1] исходной нелинейной задаче, структура их множеств малых решений в окрестности точки ветвления одинакова. Возникающая задача построения общего вида УР по допускаемой им группе симметрии решается на основе методов группового анализа дифференциальных уравнений [2] (см. [3, 4]). В математической физике нередко встречаются задачи теории ветвления с симметрией плоских кристаллографических групп. Примером могут служить задачи о тепловой конвекции в жидкости, при разыскании разветвляющихся периодических решений с симметрией прямоугольной, треугольной или гексагональной решёток. В работе исследованы различные вырожденные случаи в указанной ситуации.*

Ключевые слова: *гексагональной решётки, многообразия, системы разветвления.*

УДК 3054

Для определенности рассмотрим случай гексагональной решётки для $dim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mathcal{B}})$=6. Тогда УР$f_j(\xi, \mathcal{E})=0$; j=$\overline{1,6}$,допускает группу симметрии шестиугольника (принято соглашение нумеровать элементы φ_j базиса в $\mathcal{N}$ ($\boldsymbol{\mathcal{B}}$) и отвечающие им векторы ℓ_j обратной решётки так, что если вектору ℓ отвечает нечетный номер, то вектору $-\ell$ ставится в соответствие последующий чётный номер):

$$(A_g\xi, \mathcal{E})= A_g(\xi,\mathcal{E}),\ f_{2k}(\xi,\mathcal{E}) = f_{2k-1}(\xi,\mathcal{E})(\hat{\xi} = \mathrm{A_g}\xi, \hat{f} = \mathrm{A_g}f \qquad (1)$$

где $\mathrm{A_g}$– группа симметрии гексагональной решётки, т.е. сдвиги

$$diag\Big\{\xi_1 expi\alpha\big(la_1+\sqrt{3}ma_2\big), \xi_2 exp\big[-i\alpha\big(la_1+\sqrt{3}ma_2\big)\big], \xi_3 exp\frac{i\alpha}{2}\big[(l+3m)a_1+\sqrt{3}(-l+m)a_2\big], \xi_4 exp\left(\frac{-i\alpha}{2}\big[(l+3m)a_1+\sqrt{3}(-l+m)a_2\big]\right)\xi_5 exp\frac{i\alpha}{2}\big[(-l+3m)a_1-\sqrt{3}(l+m)a_2\big], \xi_6 \exp\left(-\frac{i\alpha}{2}\big[(-l+3m)a_1-\sqrt{3}(l+m)a_2\big]\right)\Big\}, \qquad (2)$$

(l и m одинаковой четности, для простоты l=m=1) и подстановки

P_1=(12)(34)(56),P_2=(12)(35)(46),P_3=(125246),P_4=(13)(24)(56),P_5=(145)(236),P_6=(14)(23),
P_7=(154)(253),P_8=(15)(26),P_9=(26)(25)(36),P_{10}=(264253),P_{11}=(34)(45) (3)

Базис инвариантов группы (2),(3) в пространстве векторов ($\xi_1,\ldots,\xi_6$; $f_1,\ldots,f_6$) стоит выбрать в виде

$$I_j(\xi,f) = \frac{f_j}{\xi_j}, \qquad j = \overline{1,6};\ I_{6+k}(\xi) = \xi_{2k-1}\xi_{2k}, \qquad k = \overline{1,3}, \qquad (4)$$

$$I_{10}(\xi) = \xi_1\xi_4\xi_5;\ I_{11}(\xi) = \xi_2\xi_3\xi_6 \qquad (5)$$

Где$I_{10}(\xi).I_{11}(\xi) = I_7(\xi)I_8(\xi)I_9(\xi)$

По теореме [2] о представлении инвариантного многообразия

F:f-f(ξ,$\mathcal{E}$)=0, первое уравнение системы разветвления имеет вид

$$f_1(\xi,\varepsilon) = C_0(\varepsilon)\xi_1 + \sum_{p_\alpha,q_\beta} C_{p_\alpha,q_\beta}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{p_1}(\xi_3\xi_4)^{p_2}(\xi_5\xi_6)^{p_3}[\xi_n(\xi_1\xi_4\xi_5)^{q_1}(\xi_2\xi_3\xi_6)^{q_2}]^{out}$$
$$= \xi_1 \sum_{|p_\alpha|\geq 0} C_{p_{oc}0}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{p_1}(\xi_3\xi_4)^{p_2}(\xi_5\xi_6)^{p_3}$$
$$+ \sum_{p_{\alpha,k>0}} C_{p_{\alpha k}}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{p_1}(\xi_3\xi_4)^{p_2}(\xi_5\xi_6)^{p_3}\xi_1^{k-1}(\xi_5\xi_6)^{k+1}$$
$$+ \sum_{p_{1,k>0}} C^{(1)}_{p_{\alpha k}}(\varepsilon)(\xi_1\xi_2)^{p_1}(\xi_3\xi_4)^{p_2}(\xi_5\xi_6)^{p_3}\xi_1^{k+1}(\xi_4\xi_5)^{k} = 0$$

Остальные пять уравнений находятся из условия симметрии относительно подстановок: $f_{k+1}(\xi,\varepsilon) = P_{2k}f_1(\xi,\varepsilon) = f_1(P_{2k}(\xi),\varepsilon) = 0 \quad k = \overline{1,5}$

$$f_{k+1}(\xi,\varepsilon) = P_{2k-1}f_1(\xi,\varepsilon) = f_1(P_{2k-1}(\xi),\varepsilon) = 0 \qquad k = \overline{1,5}$$

Здесь символ $[\ldots]^{out}$ означает факторизацию выражения внутри скобки по связи (5).

Список литературы

1. *Вайнберг М.М, Треногин В.А*. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. Наука, 1989. 526 с.
2. *Овсянников Л.В.* «Групповой анализ дифференциальных уравнений» М: Наука, 1976. 400 с.
3. *Логинов Б.В.* «Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности». Ташкент.: Фан, 1985. 184 с.