

ПРИМЕРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ГИПОЦИКЛОИДНЫМИ МЕРИДИАНАМИ

Кайдасов Ж.

Кайдасов Жеткербай - кандидат физико-математических наук, профессор,
кафедра математики,
Актюбинский региональный государственный университет им.К. Жубанова,
г. Актобе, Республика Казахстан

Аннотация: в данной работе на основе вращения вокруг оси симметрии гипоциклоиды построены новые виды поверхностей вращения. Выделены их части, являющиеся поверхностями отрицательной кривизны. Установлены их геометрические формы с использованием компьютерной графики.
Ключевые слова: гипоциклоида, поверхности вращения, отрицательная кривизна.

УДК 514.7

В работе [1] для построения секционно катушкообразных поверхностей использованы эпициклоиды. Горизонтальными сечениями этих поверхностей являются эпициклоиды [2]. Приняв теперь гипоциклоиду за образующую, можно построить новые виды поверхностей вращения [3].

Для построения таких поверхностей за ось вращения примем ту ось, с которой берет начало образующая гипоциклоиду точка [2] (Рис. 1).

Уравнения полученной поверхности могут быть записаны в виде:

$$x = (R(1-m)\text{Sin}mu - mR\text{Sin}(1-m)u)\text{Cos}v, \quad y = (R(1-m)\text{Sin}mu - mR\text{Sin}(1-m)u)\text{Sin}v,$$

$$z = R(1-m)\text{Cos}mu + mR\text{Sin}(1-m)u,$$

где $m = r/R$, R - радиус неподвижной окружности, а r - радиус катящейся окружности.

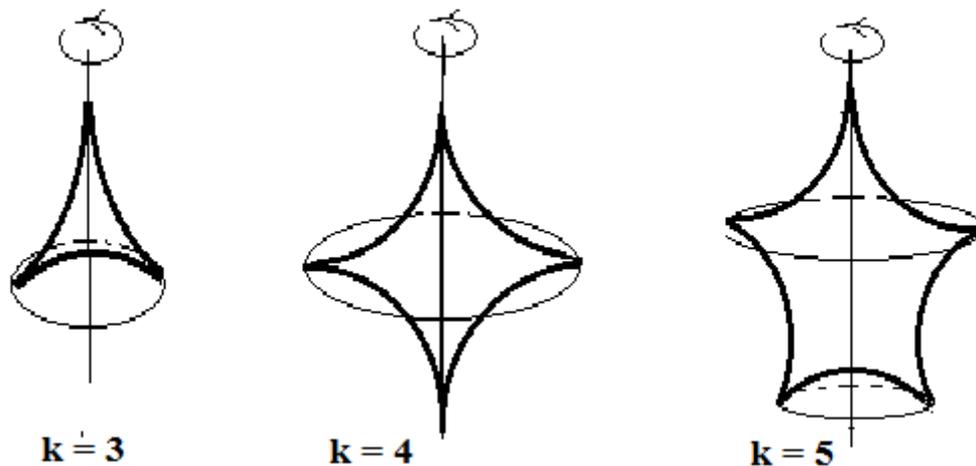


Рис. 1. Гипоциклоиды: отношение радиуса неподвижной окружности к радиусу катящейся окружности соответственно равно: $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$

I. В результате такого вращения получим поверхности без самопересечений, если отношение R/r принимает целочисленные значения. На рисунке 2 изображены примеры поверхностей вращения для нечетных значений $k = R/r$, а на рисунке 3 изображены примеры поверхностей вращения для четных значений $k = R/r$.

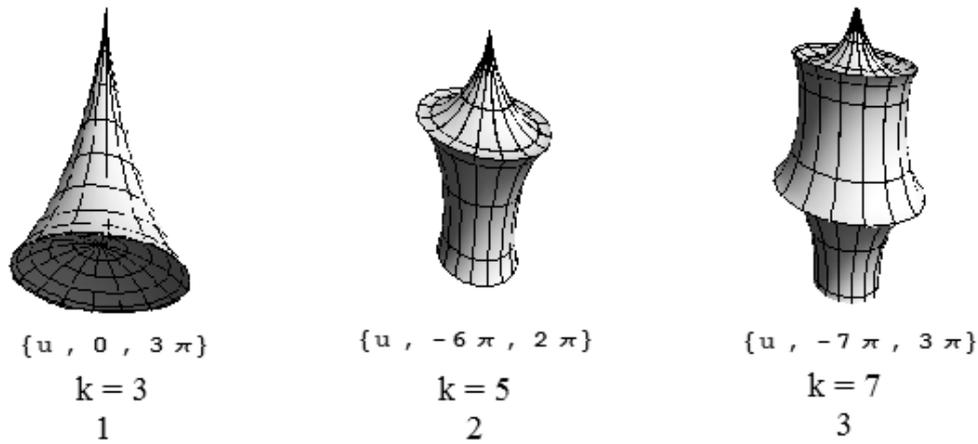


Рис. 2. Отношение радиуса неподвижной окружности к радиусу катящейся окружности соответственно равно: $k_1 = 3, k_2 = 5, k_3 = 7$

Вычислим K и H по формулам:

$$K = \frac{(f'\varphi'' - \varphi'f'')\varphi'}{(f'^2 + \varphi'^2)f} \quad H = \frac{(f'^2 + \varphi'^2)\varphi' + (f'\varphi'' - \varphi'f'')f}{2(f'^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Для построенных поверхностей $K = -\frac{(1-2m)\text{Sin}(\frac{u}{2})}{4m(1-m)}, \quad H = \frac{(1-2m)\text{Cos}(\frac{(2m-1)u}{2})}{4mR(1-m)\text{Sin}(\frac{u}{2})}$

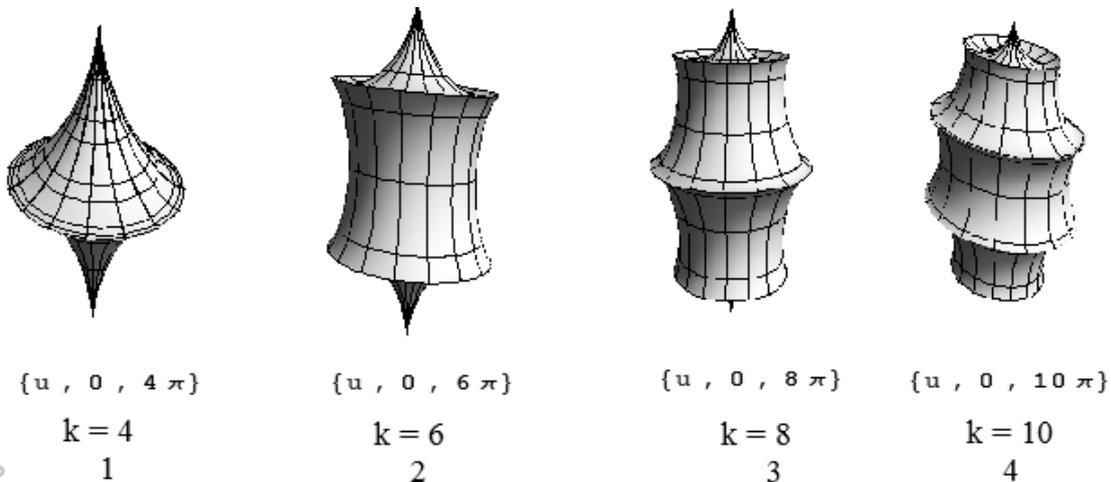


Рис. 3. Отношение радиуса неподвижной окружности к радиусу катящейся окружности соответственно равно: $k_1 = 4, k_2 = 6, k_3 = 8, k_4 = 10$

II. Вершины гипоциклоиды описывают линии состоящие из особых точек поверхности. Указанные линии разбивают всю поверхность на части среди которых есть пояса с одинаковой по знаку полной кривизной и есть части имеющие разные по знаку кривизны. Если исключить имеющие разные по знаку кривизны части, то получим поверхности отрицательной кривизны с “особенностями” – они имеют ребра или острия (Рис. 4; 5).



$$\{u, 0, 2\pi\}$$

$$k = 3$$

1



$$\{u, -4\pi, -2\pi\}$$

$$k = 5$$

2

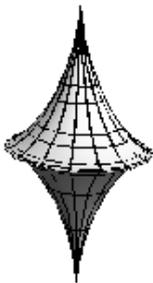


$$\{u, -6\pi, -2\pi\}$$

$$k = 7$$

3

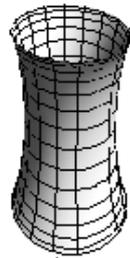
Рис. 3. Поверхности отрицательной кривизны, полученные после исключения части, имеющие разные по знаку кривизны: $k_1 = 3, k_2 = 5, k_3 = 7$



$$\{u, 0, 4\pi\}$$

$$k = 4$$

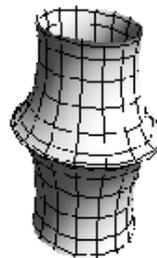
1



$$\{u, 2\pi, 4\pi\}$$

$$k = 6$$

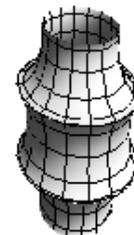
2



$$\{u, 2\pi, 6\pi\}$$

$$k = 8$$

3

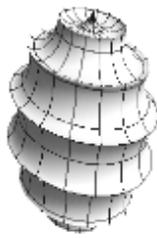


$$\{u, 2\pi, 8\pi\}$$

$$k = 10$$

4

Рис. 4. Поверхности отрицательной кривизны, полученные после исключения части, имеющие разные по знаку кривизны: $k_1 = 4, k_2 = 6, k_3 = 8, k_4 = 10$



$$k = 14$$



$$k = 18$$



$$k = 22$$

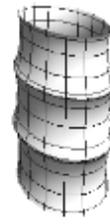


Рис. 5. Поверхности с «экваторными поясами»: $p_1 = 3, p_2 = 4, p_3 = 5$

Список литературы

1. Кайдасов Ж. О трех видах катушкообразных поверхностей // Достижения науки и образования, 2018. № 1 (23). С. 6-8.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: АСТ: Астель, 2006. 991 с.
3. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. М.: Изд.МГУ, 1990.