ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИИ БАЛКИ

Омаров А.[1], Ережепова Ш.К.[2]

[1]Омаров Аллаберген – кандидат физико-математических наук, доцент;
[2]Ережепова Шийрин Курбаназаровна – ассистент,
кафедра математического анализа,
Каракалпакский государственный университет,
г. Нукус, Республика Узбекистан

Аннотация: *в настоящей работе рассматривается решение уравнения с частными производными четвертого порядка. Ставится обратная задача к этим задачам. С помощью задачи Штурма-Лиувилля для неизвестной функции ищется решения в виде ряда Фурье. Неизвестные коэффициенты ряда Фурье находятся из граничных условий. Решение обратных задач находится, используя известные функции методом сравнения в виде ряда Фурье.*

Ключевые слова: *разделения переменных, уравнения четвертого порядка, обратная задача.*

УДК 517. 95

1^0. Рассматривается задача о колебании тонкой балки длиной l .Балка жестко заделанная с обоих концов. Не вдаваясь в механику тонких балок, мы примем, что учёт сопротивления изгиба приводим (вместо волнового уравнения) к уравнениям четвертого порядка в области $D=\{0\le x\le l,\ t>0\}$ $[2]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_0^4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \qquad (1)$$

с неизвестным начальными условиями $[3]$:

$$u(x,0)=f_1(x) \qquad (0<x<l) \qquad (2)$$

$$u_t(x,0)=f_2(x) \qquad (0<x<l) \qquad (3)$$

и с известными граничными условиями

$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=0 \qquad (t>0) \qquad (4)$$

$$u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0 \qquad (t>0) \qquad (5)$$

в области D.

Ищем общие решения задачи (1)-(5) с помощью метода Фурье:

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad (6)$$

После разделения переменных получим относительно переменных $X(x)$ следующее задачи Штурма-Лиувилля

$$X^{IV}-\lambda^4\cdot X=0 \qquad (7)$$

$$X(0)=X(l)=0 \qquad (8)$$

$$X''(0)=X''(l)=0 \qquad (9)$$

Общее решения уравнения (7) имеет вид

$$X_\lambda(x)=a\cos\lambda x+b\sin\lambda x+c\,ch\lambda x+d\,sh\lambda x \qquad (10)$$

Подстановка в граничные условия (8)-(9) получим неизвестные коэффициенты a,b,c,d следующем виде

$$\begin{cases}a+c=0\\-a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\a=0\end{cases} \qquad (11)$$

и

$$\begin{cases}b\sin\lambda l+dsh\lambda l=0\\-b\sin\lambda l+dsh\lambda l=0\end{cases} \qquad (12)$$

Отсюда

$$b \neq 0\ ,\ d = 0,\ \ \sin \lambda l = 0 \qquad (13)$$

$$\lambda l = \pi k,\ k = 1,2,3,\ldots,;\quad \lambda_k = \frac{\pi k}{l} \qquad (14)$$

Соответственно собственные функции

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x \qquad (15)$$

Для $T_k(t)$ функции получим уравнения

$$T_k^{''}(t) + \left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^4 T_k(t) = 0 \qquad (16)$$

Общее решения (16) находим в виде

$$T_k(t) = a_k \cos\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t + b_k \sin\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t. \qquad (17)$$

Решения (15) и (17) подставляя в (6), получим общее решения уравнения (1) в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t + b_k \sin\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{\pi k}{l} x \qquad (18)$$

где a_k, b_k неизвестные коэффициенты ряда (18).

Известно фиксированное время $t = t_0$:

$$u(x,t_0) = \varphi(x) \qquad (19)$$

$$u_t(x,t_0 = \psi(x) \qquad (20)$$

Подстановка (18) в (19)-(20) дает следующие системы для неизвестных a_k, b_k:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 t_0 + b_k \sin\left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 t_0\right]\sin\frac{\pi k}{l} x, \\ \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-a_k \sin\left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 t_0 + b_k \cos\left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 t_0\right]\cdot\left(\frac{\pi a k}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi k}{l} x \end{cases} \qquad (21)$$

Для решения обратной задачи (1)-(5) из системы (21) находим неизвестные коэффициенты a_k, b_k. Система (21) имеет решение, так как определитель системы $\Delta = 1 \neq 0$.

$$a_k = \begin{vmatrix} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l} x dx & \sin\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t_0 \\ \frac{2l}{(\pi a_0 k)^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi k}{l} x dx & \cos\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t_0 \end{vmatrix},$$

$$b_k = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t_0 & \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx \\ -\sin\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t_0 & \frac{2l}{(\pi a_0 k)^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx \end{vmatrix}.$$

Любая дважды дифференцируемая функция $u-u(x,t)$ разложима ряд Фурье по собственным функциям $\sin\frac{\pi k}{l}x$ [1]:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t+b_k\sin\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2 t)\sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Теперь находим неизвестные функции $f_1(x), f_2(x)$ обратной задачи (1)-(5).

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{\pi k}{l}x$$

$$f_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\left(\frac{\pi a_0 k}{l}\right)^2\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

где a_k и b_k известные коэффициенты (24)-(25). Подставляя известные коэффициенты a_k, b_k в (18) и находим частное решения (1)-(5).

Список литературы

1. *Кошляков Н.С., Глинер Э,Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
2. *Омаров А., Курбанбаев О.* Об одном алгоритме решения обратных задач теплопроводности в бесконечном цилиндре в конусе. Вестн. КГУ, 2009. 2. С. 23-26.
3. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.