ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДОЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ СТРУЕ

Кошкин Д.В.[1], Семяшкина М.А.[2]

[1]Кошкин Дмитрий Владиславович – студент;
[2]Семяшкина Мария Аркадьевна – студент,
кафедра систем управления и компьютерных технологий,
Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова,
г. Санкт-Петербург

Общее решение задачи о плоском течении газовой струи является очень сложным для практических расчетов. Рассмотрим приближенный метод решения задачи о дозвуковой газовой струе, предложенный С.А. Чаплыгиным [1, с. 126].

Уравнение точного решения задачи о газовой струе в переменных τ и θ имеет вид

$$\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\tau(1-\tau)^{-\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right]=0, \qquad (1)$$

где $\beta=\frac{1}{\gamma-1}$, $\tau=\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{a_0^2}$, $\psi(\theta,\tau)$ – функция тока, θ – направление течения, γ – показатель адиабаты ($\gamma=1{,}4$ для воздуха), q – скорость потока, a_0 – начальная скорость звука.

Необходимо заметить, что

$$M^2=\frac{q^2}{a^2}=\frac{2}{\gamma-1}\frac{\tau}{1-\tau}, \qquad (2)$$

где M – число Маха ($M<1$ для дозвукового течения).

Для рассмотрения приближенного решения введем в уравнение (1) вместо τ новую переменную σ, такую, что

$$d\sigma=-\frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}d\tau=-\frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{dq}{q}, \qquad (3)$$

где ϱ – плотность жидкости, ϱ_0 – начальная плотность жидкости.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$K(\sigma)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}=0, \qquad (4)$$

где

$$K(\sigma)=\frac{1-(2\beta+1)^{\tau}}{(1-\tau)^{2\beta+1}}=(1-M^2)(\frac{\varrho_0}{\varrho})^2. \qquad (5)$$

В приближенном решении используется упрощенное выражение для функции $K(\sigma)$. Функция $K(\sigma)$ приближенно равна единице для значений M, лежащих в интервале от 0 до 0,5. Это обстоятельство и использовал в своем методе С.А. Чаплыгин, положив $K(\sigma)=1$ [2].

Такое условие приводит к выражению

$$K(\sigma)=(1-M^2)(\frac{\varrho_0}{\varrho})^2=1$$

или

$$q^2=\left[1-\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2\right]\frac{dp}{d\varrho}, \qquad (6)$$

где p – давление.

Запишем уравнение Бернулли в следующей форме:

$$q\frac{dq}{d\varrho}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\varrho}=0. \qquad (7)$$

Объединив уравнения (6) и (7), находим следующее выражение:

$$\left[1-\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2\right]\left[\frac{d^2p}{d\varrho^2}+\frac{2}{\varrho}\frac{dp}{d\varrho}\right]=0\,. \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет два решения. Рассмотрим первое:

$1-\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2=0$,

следовательно,

$$\varrho=\varrho_0. \qquad (9)$$

Второй вариант решения уравнения (8):

$\frac{d^2p}{d\varrho^2}+\frac{2}{\varrho}\frac{dp}{d\varrho}=0$,

$$p=A-\frac{B}{\varrho}, \qquad (10)$$

где A и B – постоянные.

Уравнение (10) дает соотношение между давлением и плотностью газа при условии, что $K(\sigma)=1$. Реальный газ, как известно, не подчиняется этому уравнению состояния. Однако эта прямая линия может в данной точке считаться касательной к действительной изэнтропической кривой реального газа. Таким образом, касательная к изэнтропической кривой является хорошим приближением к случаю реального газа при условиях, что параметры состояния находятся вблизи точки касания. С.А. Чаплыгин в качестве точки касания выбрал точку, соответствующую параметрам заторможенного потока.

В приближенном методе решения при $K(\sigma) = 1$ основное уравнение (4) приводится к уравнению Лапласа. Таким образом, уравнение (4) в этом случае имеет такое же выражение, как и уравнение для случая несжимаемой жидкости. Функция тока является аналитической функцией от σ и θ. Кроме того, из (4) следует, что

$$-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}, \qquad (11)$$

где φ – потенциал скорости.

Комплексный потенциал $\varphi + i\psi$ будет аналитической функцией $\sigma + i\theta$.

Для решения задачи о струйном течении сжимаемой жидкости с заданными граничными условиями рассмотрим сначала течение несжимаемой жидкости с темы же граничными условиями. Для случая несжимаемой жидкости имеем

$$F_i = \varphi_i + i\psi_i = F(\sigma_i + i\theta), \qquad (12)$$

где $\sigma_i = \ln\left(\frac{q_0}{q_i}\right)$, q_0 – некоторая начальная скорость, q_i – скорость несжимаемой жидкости.

Тогда для случая сжимаемой жидкости искомое решение будет иметь следующий вид:

$$F = \varphi + i\psi = F(\sigma + i\theta). \qquad (13)$$

Функция $F(\sigma + i\theta)$ имеет такое же выражение, как и функция $F(\sigma_i + i\theta)$. Таким образом, для того чтобы найти искомое решение для струи сжимаемой жидкости, заменим в уравнении (12) σ_i на σ.

Найдя комплексный потенциал $F = \varphi + i\psi$, определим контур струи по следующей формуле:

$$dz = dx + i \cdot dy = \frac{e^{i\theta}}{q}\left(d\varphi + i\frac{\varrho_0}{\varrho}d\psi\right) =$$

$$= \frac{\varrho_0}{\varrho}\frac{e^{i\theta}}{q}\left\{-\left[(1 - M^2)\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - i\frac{\partial\psi}{\partial q}\right]dq + \left[q\frac{\partial\psi}{\partial q} + i\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]d\theta\right\}. \qquad (14)$$

В упрощении $K(\sigma) = 1$ уравнение (3) представляет собой

$$\frac{1}{q}\frac{\varrho_0}{\varrho} = C_1e^{\sigma} - C_2e^{-\sigma}, \qquad (15)$$

а из уравнения (5) получим

$$\frac{1}{q} = C_1e^{\sigma} - C_2e^{-\sigma}. \qquad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в формулу (14), имеем:

$$dz = e^{i\theta}[(C_1e^{\sigma} - C_2e^{-\sigma})d\varphi + i(C_1e^{\sigma} - C_2e^{-\sigma})d\varphi], \qquad (17)$$

где постоянные C_1 и C_2 связаны между собой соотношением

$$1 = C_1 + C_2q_j^2. \qquad (18)$$

При помощи этого метода было найдено решение об истечении жидкости из отверстия в плоской стенке и из насадки Борда. Когда значение $M_j = {}^{q_j}/_{a_j}$ равно единице, коэффициент сжатия струи, вытекающей из отверстия в тонкой стенке, по приближенному методу равен 0,714, в то время как точный расчет дает значение 0,740.

Список литературы

1. *Чаплыгин С.А.* О газовых струях. М.: Госиздат, 1949.
2. *Бай Ши-И.* Теория струй. М.: Госиздат, 1960.