РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Рахимов Н.Н.[1], Хакназарова Х.К.[2], КозаковаФ.Н.[3]

[1]Рахимов Насриддин Номозович - преподаватель высшей категории математических наук, заведующий кафедрой, кафедра математики и информатики, академический лицей;
[2]Хакназарова Хуршида Кенджаевна - учитель высшей категории, академический лицей Самаркандский государственный иностранный институт, г. Самарканд;
[3]Феруза Норовна Козакова - учитель начальных классов, школа № 12, с. Кулба, Форишский район, Джизакская область, Республика Узбекистан

Аннотация: *многие математические задачи допускают несколько вариантов решения. Часто первый избранный бывает далеко не самым удачным. Нахождение «наиболее простых», оригинальных путей решения нередко является результатом длительной и кропотливой работы. Умение решать задачу различными способами является одним из признаков хорошей математической подготовки.*
В статье указано, как с помощью теоремы Пифагора решены некоторые алгебраические задачи. В каждом этюде приведены геометрические приемы решения задач.
Ключевые слова: *теорема Пифагора, прямоугольный треугольник, функция, уравнение, неравенство, система уравнение и тригонометрия.*

УДК: 514

Известно, в прямоугольный треугольники $a^2+b^2=c^2$, где a и b - катеты, c –гипотенуза (теорема Пифагора). Об этом теореме все ученики хорошо знает по курсе геометрии.

Мы на этом статье покажем с помощью теорему Пифагора не только решить геометрический задачи, но и можно решить алгебраический задачи.

Все задачи разделим на 4 частей:

1) Найти наибольший и наименьший значение функции;
2) Решить систем уравнение;
3) Решить тригонометрический задачи;
4) Решить уравнение и неравенство.

Решить задачи в этом методы ученики ещё более интересовали на уроки математике.

1. Найти наибольший и наименьший значение функции

1-задача. Найдите наименьший значение функции $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}$, если числа x, y, z – положительны и $x+y+z=8$.

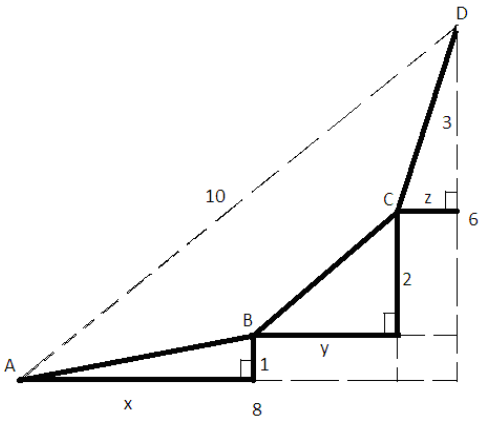

Рис. 1. Рисунок по условию задачи

Решение. Рисуем следующие рисунке (1 рис.). Данная функция (сумма) – это длина ломаной линии, помещенной на рисунке (здесь каждое слагаемое AB, BC, CD соответственно гипотенуза трёх прямоугольный треугольник). Аналогично, длина ломаной линии не меньше 10 и из условии задачи

$x+y+z=8$. Минимум суммы будет только ломаная при этом совпадает с отрезком AD, поэтому $f_{\min}(x,y,z)=10$ [3],

2-задача. Найдите наибольший значение функции $f(x)=\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$

Решение. Посмотрим треугольник ABC (2 рис.),

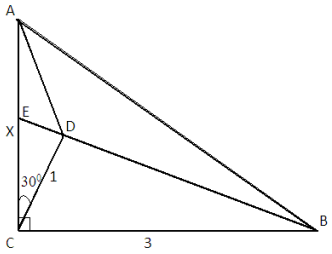

Рис. 2. Прямоугольный треугольник по условию задачи

здесь $\angle ACB=90^0, \angle ACD=30^0, AC=x, BC=3, CD=1$ и точка D расположена внутри треугольника ABC. В треугольнике ABC применяем теорему Пифагора: $AB=\sqrt{x^2+9}$. В треугольнике ACD применяем теорему косинусов: $AD=\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$. Тогда, $\max f(x)=\max(AB-AD)=EB-ED=DB$, этот способ выполнить только будет(из неравенство треугольнике) $D\in AB$. Из теорему косинусов: $DB=\sqrt{1^2+3^2-2\cdot1\cdot3\cdot\cos60^0}=\sqrt{7}$.

Значить ответ: $f_{\max}(x)=\sqrt{7}$ [3].

2. Решить системе уравнение

3-задача. Решить системе уравнение $\begin{cases} x+y+z=60 \\ x^2+y^2=z^2 \\ \dfrac{xy}{z}=12 \end{cases}$

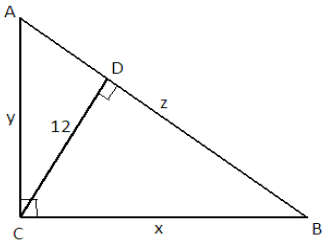

Рис. 3. Прямоугольный треугольник по условию задачи

Решение. 1) Пусть x, y, z - положительная числа. Рисуем ABC- прямоугольный треугольник, длина катеты x и y, а гипотенуза z (3 рис.). Периметр этого треугольника p=60, а высоты опущенный на гипотенуза h=12. Написать можно первые уравнение из системе $(x+y)^2=(60-z)^2$, вторые и третье уравнение из системе $(x+y)^2=z^2+24z$. Очевидно, $(60-z)^2=z^2+24z \Rightarrow 144z=60^2 \Rightarrow z=25$.

Тогда будет $\begin{cases} x+y=35 \\ xy=300 \end{cases}$, значение неизвестных этого уравнение 5 и 20. Значить, корень систему уравнение (15, 20, 25) и (20, 15, 25).

2) В условии задача не говорили о числа a,в,c положительны или отрицательны. Из третьего уравнение системы предположим двух неизвестных будет отрицательны. Мы смотрим вверху z>0. Тогда x<0 и y<0. Из $x+y=35$, x, y-положительный.

Значить, ответь (15, 20, 25) и (20, 15, 25) [1], [2].

3. Решить тригонометрический задачи

4-задача. Вычислить

$$arctg2+arctg3+arctg1 \qquad (1)$$

Решение. Выполним следующие построения:

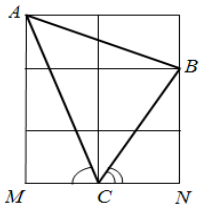

Рис. 4. Используем определение тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике. arctg3 = ∠ ACM, arctg2= ∠ BCN

Тогда *arctg1= ∠ BAC,* так как ∠ *BCA*- острый уголь прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC* с прямым углом *B(BC=AB=* $\sqrt{5}$, *AC=* $\sqrt{10}$ по теореме Пифагора, см. чертеж) , а по теореме, обратной теореме Пифагора, $AC^2 = AB^2+BC^2$ *то есть 10=5+5,*(следовательно ∠ *CBA* = 90°, а ∠ *BCA* = 45°). Таким образом, *arctg2+arctg3+arctg1= ∠ BCN+ ∠ ACM+ ∠ BCA= ∠ MCN=* $180^0 = \pi$. Ответ: π .

4. Решить уравнение и неравенство

5-задача. Решить уравнение. $\sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144} = 13$

Решение. Рисуем ABC-прямоугольный треугольник и проводит CD-биссектриса (5 рис.).

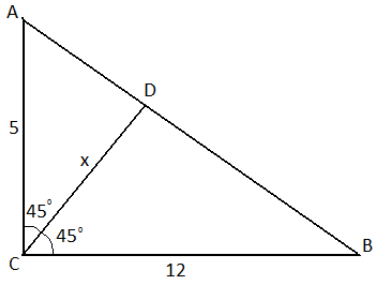

Рис. 5. Прямоугольный треугольник по условию задачи

Прямоугольный треугольники ADC и BDC применять теорема косинусов, возьмём результат $AD = \sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25}$ и $\mathrm{BD} = \sqrt{\mathrm{x}^2 - 12x\sqrt{2} + 144}$. Известно, AB=AD+BD=13 и CD=x-биссектриса. Тогда, $CD = x = \frac{\sqrt{2} \cdot AC \cdot BC}{AC + BC} = \frac{\sqrt{2} \cdot 5 \cdot 12}{5 + 12} = \frac{60\sqrt{2}}{17}$. Значить, ответ $x = \frac{60\sqrt{2}}{17}$, [1]

6-задача. Доказать неравенство. $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \quad (\mathrm{a} > 0, \mathrm{b} > 0).$

Решение. Построена полуокружность с диаметром *a+b* (6 рис.).

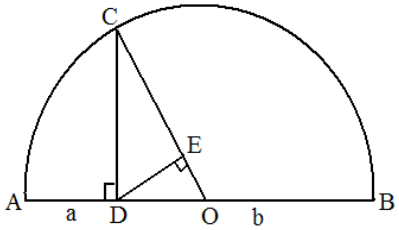

Рис. 6. Прямоугольный треугольник внутри полуокружности

Известно, что AD=a, BD=b, CD= $\sqrt{ab}$, OC= $\frac{a+b}{2}$. Из подобие OCD и CDE прямоугольный треугольников получить результат

$$\frac{CE}{CD}=\frac{CD}{CO}\Rightarrow\frac{\mathrm{CE}}{\sqrt{\mathrm{ab}}}=\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}\Rightarrow\mathrm{CE}=\frac{2\mathrm{ab}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}=\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{b}}.$$

Видно на рисунке CE<CD<CO. Равенство выполняет только будет a=b. Доказать неравенство. [3]

Задача для самостоятельная работа.

№ 1 Найдите наименьший значение функции $f(x)=\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$.

№ 2 Решить уравнение**.**

a) $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{3}+9}=\sqrt{19}$, b) $\sqrt{2x^2+2-4x}+x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+2-2x}=\sqrt{6}$

№ 3 Вычислить.

a) $\sin\left(arctg\frac{2}{3}+arctg\frac{1}{5}\right)$ b) $\sin\left(2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ c) $tg\left(2\arcsin\frac{12}{13}\right)$

№ 4 Решить системе уравнение

a) $\begin{cases}x+y+z=30\\x^2+y^2=z^2\\xy=6z\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12\\y\sqrt{x^2-y^2}=12\end{cases}$

Список литературы

1. *Абдухамидов А.У., Насимов Х.А. и др.* Алгебра и основы математического анализа. Учебник академического лицея. Ташкент. Издательство «Учитель», 2012.
2. *Исраилов И., Пашаев З.* Геометрия. 1 часть. Учебник академического лицея. Ташкент, Издательство «Учитель», 2004.
3. *Яковлев Г.Н., Купцов Л.П. и др.* Всероссийские математические олимпиады школьников. Москва. Издательство «Прос*вещение», 1992.*