

СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ТОРОПОДОБНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Кайдасов Ж.

Кайдасов Жеткербай - кандидат физико-математических наук, профессор,
кафедра математики,
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актюбе, Республика Казахстан

Аннотация: в статье рассматриваются поверхности отрицательной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , которые по внешнему виду очень похожи на катушкообразные. Преобразованием параметрических уравнений внутренней поверхности тора определены аналитические описания некоторых видов тороподобных поверхностей и установлены их геометрические формы с использованием компьютерной графики. Вычислением полной кривизны для каждого типа установлено, что они имеют отрицательную гауссову кривизну.

Ключевые слова: поверхности вращения, поверхность тора, отрицательная кривизна, катушкообразные поверхности.

УДК 514.7

Все поверхности постоянной отрицательной кривизны, данные последних лет, получены в основном преобразованием параметрических уравнений псевдосферы или склеиванием частей других псевдосферических поверхностей [1].

Поэтому одним из методов построения псевдосферических поверхностей является преобразование уравнений известных поверхностей.

Мы хотим преобразованием параметрических уравнений внутренней части тора построить некоторые виды тороподобных поверхностей, которые по внешнему виду очень похожи на катушкообразные [2], т.е. очень похожи на псевдосферические.

Тор – поверхность вращения, получаемая вращением образующей окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Уравнения тора могут быть представлены в виде:

$$X = (4 + 2\cos v)\cos u, Y = (4 + 2\cos v)\sin u, Z = 2\sin v, 0 < v < 2\pi, -\pi \leq u \leq \pi.$$

Тор имеет внутреннюю область отрицательной кривизны и внешнюю – положительной. Если у тора «отрезать» поверхность положительной кривизны, то получится кусок поверхности отрицательной кривизны, отчасти напоминающий катушку Миндинга (Рис. 1), уравнения которой могут быть представлены в виде:

$$X = (4 + 2\cos v)\cos u, Y = (4 + 2\cos v)\sin u, Z = 2\sin v, \pi/2 < v < 3\pi/2, -\pi \leq u \leq \pi.$$

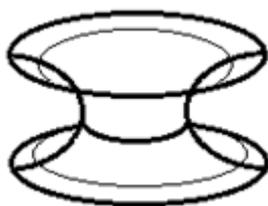


Рис. 1. Внутренняя поверхность тора напоминает катушку Миндинга

Изгибая его далее, можно получить тороподобные поверхности [3]. Среди тороподобных мы остановимся на напоминающих катушкообразные поверхности.

Рассмотрим примеры построения некоторых тороподобных поверхностей. По внешнему виду их можно разбить на три группы.

1. Обмотанные тороподобные поверхности.

1. Дважды обмотанная: $X = (1.2\cos 2u - 1/3\cos 3u)(2 - \cos v), Y = (1.2\sin 2u - 1/3\sin 3u)(2 - \cos v), Z = \sin\left(\frac{9v}{10}\right), 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ (Рис. 2).

По известной формуле $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ вычислим гауссову кривизну:

$$K = \frac{-273\cos\left(\frac{9v}{10}\right)(1.21 - \cos u)\left(2.88 + \frac{1}{3} - 2\cos u\right)\left(\frac{9}{10}\right)\sin\left(\frac{9v}{10}\right)\sin v + \cos\left(\frac{9v}{10}\right)\cos v}{400(2 - \cos v)\left\{(1.69 - 1.2\cos u)\left[\left(1.44 + \frac{1}{9} - 0.8\cos u\right) + \left(\frac{81}{100}\right)\cos^2\left(\frac{9v}{10}\right)\right] - 0.04\sin^2 u \sin^2 v\right\}}$$

2. Трехкратно обмотанная:

$X = (1.2\cos 2u - 1/3\cos 4u)(2 - \cos v), Y = (1.2\sin 2u - 1/3\sin 4u)(2 - \cos v), Z = \sin\left(\frac{9v}{10}\right), 0 \leq u \leq 2\pi, -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ (Рис. 3).

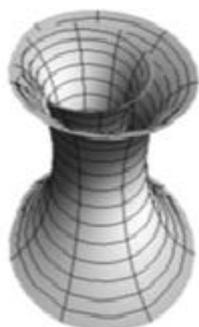


Рис. 2. Дважды обмотанная тороподобная поверхность



Рис. 3. Трехжды обмотанная тороподобная поверхность

Аналогично можно построить тороподобные поверхности и с большим числом обмоток.

II. Секционные тороподобные поверхности.

1. Трехсекционная: $X = (1.6\cos u - 0.4\cos 4u)(2 - \cos v)$, $Y = (1.6\sin u - 0.4\sin 4u)(2 - \cos v)$, $Z = \sin(\frac{9v}{10})$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ (Рис. 4).

Для этой поверхности Гауссова кривизна вычисляется по формуле:

$$K = \frac{-11.52\cos(\frac{9v}{10})(1-\cos 3u)^2(2.592\sin(\frac{9v}{10})\sin v + 2.88\cos(\frac{9v}{10})\cos v)}{6.5536(2-\cos v)\{[2(1-\cos 3u)[0.16\sin^2 v(17-8\cos 3u) + (\frac{81}{100})\cos^2(\frac{9v}{10})] - 2.56\sin^2 3u\}^2}$$

2. Пятисекционная: $X = (1.6\cos u - 0.27\cos 6u)(2 - \cos v)$, $Y = (1.6\sin u - 0.27\sin 6u)(2 - \cos v)$, $Z = \sin(\frac{9v}{10})$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ (Рис. 5).

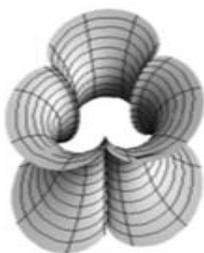


Рис. 4. Дважды обмотанная тороподобная поверхность

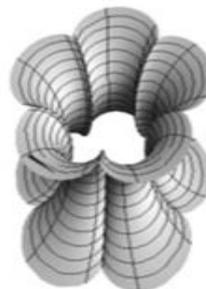


Рис. 5. Трехжды обмотанная тороподобная поверхность

Для каждой из указанных поверхностей, чтобы сохранилась отрицательность кривизны, можно определить связь между коэффициентами при тригонометрических функции в параметрических уравнениях.

III. Винтовые тороподобные поверхности.

1. $X = \cos v \left(2 - \frac{0.7}{\text{Chu}}\right)$, $Y = \sin v \left(2 - \frac{0.7}{\text{Chu}}\right)$, $Z = 0.32v + \sin u$, $0 \leq v \leq 4\pi$, $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ (Рис. 6).

Для этой поверхности гауссова кривизна будет имеет вид:

$$K = \frac{-\cos u \left[\frac{0.7}{\text{Ch}^2 u} (\text{Sh} u \sin u + \frac{0.7 \cos u (1 - \text{Sh}^2 u)}{\text{Chu}}) + \left(2 \cos u - \frac{0.7 \cos u}{\text{Chu}} \right) \right]}{(2 - 0.7/\text{Chu}) \left\{ (0.49 \text{Sh}^2 u / \text{Ch}^4 u) \left[1 + 0.32 \left(\frac{\text{Chu}}{2\text{Chu} - 0.7} \right)^2 \right] + \cos^2 u \right\}^2}$$

2. $X = \cos u (2 - \cos v)$, $Y = \sin u (2 - \cos v)$, $Z = 0.5u + \sin v$, $0 \leq u \leq 3\pi$, $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ (Рис. 7).

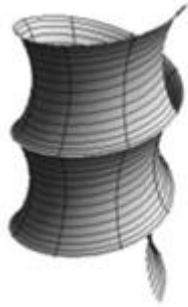


Рис. 6. Винтовая с малым шагом



Рис. 7. Винтовая с большим шагом

Графические изображения тороподобных поверхностей построены в среде WolframMathematica.

Список литературы

1. *Попов А.Г.* Псевдосферические поверхности и некоторые задачи математической физики // *Фундаментальная и прикладная математика*. Т. 11, 2005. № 1. С. 227-239.
2. *Кайдасов Ж.* О трех видах катушкообразных поверхностей // *Достижения науки и образования*, 2018. № 1 (23). С. 6-8.
3. *Путенихин П.В.* Тороподобные поверхности // *Квант. Маг.* 10. 1101, 2013.