ГЕОМЕТРИЯ СТРУКТУР n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Гончаров Б.И.

Гончаров Борис Иванович (1936-1998) - закончил Серпуховское высшее военное командно-инженерное училище, проходил службу в рядах СА, закончил службу в звании подполковника, г. Севастополь

Статья подготовлена к публикации: Сухарев Илья – кандидат технических наук, заместитель директора, ООО «Эспиро», г. Москва

Аннотация: *в статье представлен подход к систематизации геометрии элементарных структур многомерного Евклидового пространства. Получено обобщение теоремы Эйлера.*
Ключевые слова: *систематизация структур многомерного пространства, обобщение теоремы Эйлера, симплексы.*

В настоящей работе сделана попытка систематизации структур простейших фигур n-мерных пространств E^n.

Платону и пифагорейцам [1, 2, 3] принадлежит установление геометрических понятий разных размерностей – точки, линии, поверхности, тела и связей между ними: линия – след движущейся точки, поверхность – след движущейся линии, концы линий – точки и т.д. Современному человеку эти понятия кажутся тривиальными.

Для построения простейших фигур, так называемых симплексов, в E^0, E^1, E^2, E^3принят принцип минимальности используемых элементов.

Так, для построения одномерной фигуры минимально необходимы три элемента: две точки и интервал, расположенный между точками, рис. 1.

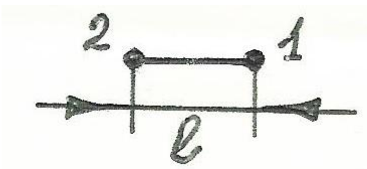


Рис. 1. Построение одномерной фигуры

Основную характеристику одномерного симплекса, интервала – длину, можно записать в следующей форме:

$L=l^1$ (1).

Основную характеристику нульмерной фигуры, точки (точка 1 на рис. 1) можно, по аналогии, записать в виде:

$T=l^0=1$(2).

Основанием интервала является нульмерный симплекс (точка 1). Высота интервала равна l. Положение вершины интервала может быть произвольным (точка 2 на рис. 1).

Для построения двумерной фигуры, двумерного симплекса, минимально необходимы семь элементов: три точки, три интервала, расположенных между точками, и одна площадь, расположенная между интервалами, рис. 2.

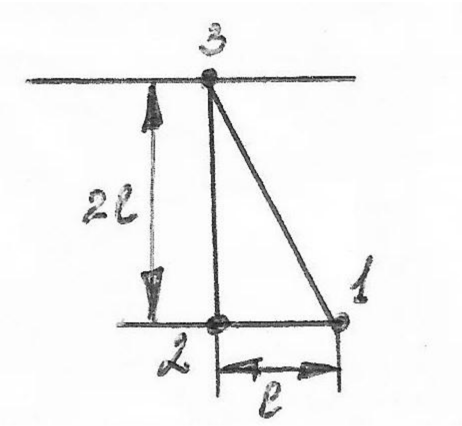


Рис. 2. Построение двумерной фигуры

Основную характеристику треугольника, двумерного симплекса – площадь, можно записать в виде:
$S=l^2$(3).

Основанием треугольника является одномерный симплекс с $L=l^1$. Высота треугольника должна быть равной *2l* для соблюдения равенства (3). Положение вершины треугольника (точка 3 на рис. 2) при этом может быть произвольным - на верхней горизонтальной линии, параллельной основанию. В дальнейшем, для упрощения задачи построения фигур большей размерности, располагаем вершину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.

Для построения трехмерной фигуры *минимально* необходимы пятнадцать элементов: четыре точки, шесть интервалов, расположенных между точками, четыре треугольника, охваченных интервалами и один объем, охваченный треугольниками, рис. 3.

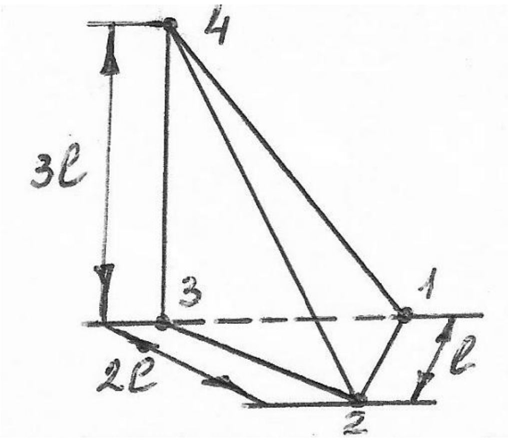


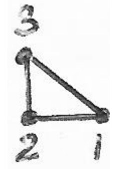
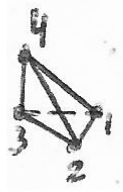
Рис. 3. Построение трехмерной фигуры

Основную характеристику пирамиды, трехмерного симплекса – объем, записываем в виде:
$V=l^3$ (4).

Основанием пирамиды является двумерный симплекс с $S=l^2$. Высота пирамиды должна быть равной *3l* для обеспечения равенства (4). Положение вершины пирамиды, при этом, может быть на верхней горизонтальной плоскости, параллельной основанию, произвольным. Для упрощения в дальнейшем задачи построения фигур большей размерности, располагаем вершину (точка 4 на рис. 3) так, чтобы получилась прямоугольная пирамида.

Составим и рассмотрим следующую таблицу (табл. 1).

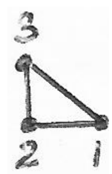
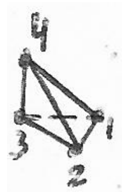
Таблица 1. Сочетание элементов

Обозначе ния элементо в	условный рисунок / элементы фигуры					
Б	точка		1	2	3	4
В	интервал			1	3	6
Г	треугольник				1	4
Д	пирамида					1

В первом вертикальном столбце записываем буквенные обозначения, а во втором – названия элементов, составляющих простейшие фигуры в E^0, E^1,E^2, E^3. В первой горизонтальной строке таблицы рисуем сами фигуры в условном изображении. Цифрами в таблице записываем количество соответствующих элементов, составляющих каждую из фигур.

Замечаем, что вписанные цифры в табл. 1 составляют часть треугольника Паскаля. Дополним недостающие цифры в этот треугольник и проанализируем полученную таблицу (табл. 2).

Таблица 2. Сочетание элементов с добавлением элемента «пустота»

Обозна-чения элемен-тов	условный рисунок / элементы фигуры					
А	пустота	1	1	1	1	1
Б	точка		1	2	3	4
В	интервал			1	3	6
Г	треугольник				1	4
Д	пирамида					1

Во второй горизонтальной строке табл. 2 проявился ряд единиц. Они определяют еще один обязательный элемент построения каждой фигуры, ранее подразумевавшийся. Назовем этот элемент «пустота» и запишем в таблицу. Действительно, не имея вокруг фигуры «хотя бы пустоты», фигуру выделить невозможно.

Таким образом, в вертикальных столбцах табл. 2 под изображением каждой фигуры окончательно определено действительное количество каждого элемента, составляющих соответствующую фигуру.

Одна из первых, по существу топологических, теорем, доказанная Л.Эйлером в 18 веке, гласит: для любого выпуклого многогранника *В-Р+Г=2*, где *В* – число вершин, *Р* – число ребер, *Г* – число граней.

В обозначениях табл.2 теорема Л.Эйлера принимает вид: *Б-В+Г=2*, где *Б* – число точек, *В* – число интервалов, *Г* – число треугольников трехмерного симплекса (последний вертикальный столбец табл. 2).

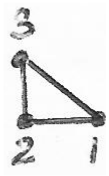
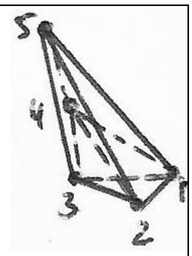
Аналог теоремы Л. Эйлера, например, для двумерного симплекса, имеет вид *Б-В=0*. Эта теорема верна в E^2 для любого многоугольника.

По существу, вышеприведенные и другие аналогичные выражения, можно получить, используя симметрию цифр в вертикальных столбцах по соответствующим фигурам табл. 2, т.е. используя симметрию цифр треугольника Паскаля.

Теорема будет иметь более полный и законченный вид для любой n-мерной фигуры, если последовательно вычитать и прибавлять число элементов каждой фигуры. Результатом всегда будет ноль. Например, для E^0*А-Б=0*; для E^1*А-Б+В=0*; для E^2*А-Б+В-Г=0*; для E^3*А-Б+В-Г+Д=0* и т.д.

Поставим задачу – построить четырехмерный симплекс в E^4. С этой целью расширим табл. 2, добавив справа еще один вертикальный столбец. Получаем количество каждого элемента искомой фигуры. Присвоим этой фигуре условное название «топ», табл. 3.

Таблица 3. Сочетание элементов с добавлением четырехмерного симплекса

Обозначения элементов	условный рисунок / элементы фигуры						
							
А	пустота	1	1	1	1	1	1
Б	точка		1	2	3	4	5
В	интервал			1	3	6	10
Г	треугольник				1	4	10
Д	пирамида					1	5
Е	топ						1

Основную характеристику топа, четырехмерного симплекса – топиома, можно записать в виде:
$W=l^4$ (5).

Основанием топа является трехмерный симплекс, пирамида с $V=l^3$. Высота топа должна быть равной $4l$. Это значение высоты естественно продолжает ряд значений высот в симплексах: для E^1- l; для E^2– $2l$; для E^3– $3l$; для E^4– $4l$.

Положение вершины топа (точка 5 на рис. 4) возможно на части сферы, ограниченной трехгранным телесным углом, симметричным относительно вершины пирамиды (точка 4, рис. 4) углу при ее вершине. Только при этом выполняются условия последнего вертикального столбца табл. 3.

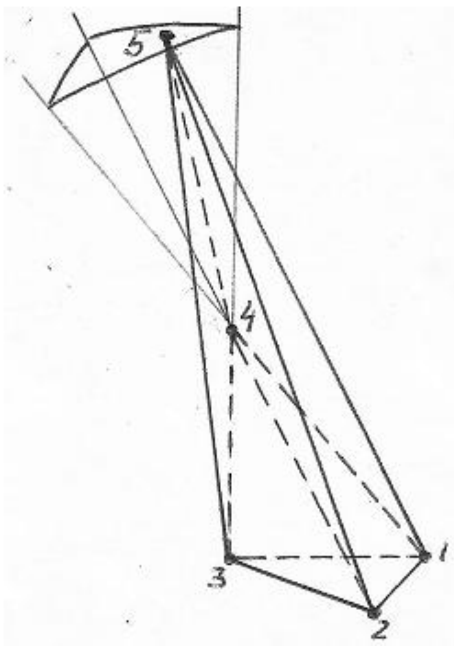


Рис. 4. Построение четырехмерной фигуры

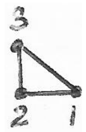
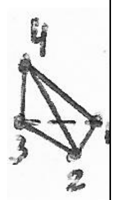
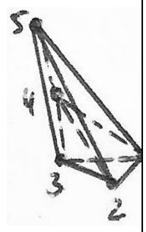
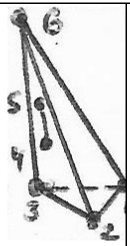
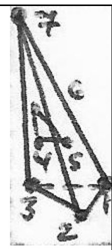
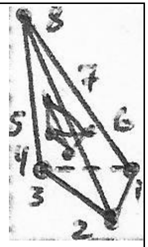
Рассматривая рис. 4, можно представить топ, как своеобразную «точку» (точка 4, рис. 4), которая, в отличие от точки в E^0, охваченной пустотой, в E^4 охвачена пятью пирамидами – четырьмя смежными и одной общей.

Замечаем также, что формально можно построить еще три топа около остальных трех вершин пирамиды (точки 1, 2, 3) с одинаковой характеристикой $W=l^4$, но с различными характеристиками некоторых составляющих элементов.

Таким образом, построение четырехмерного симплекса дало семейство из четырех топов.

Поставим следующую задачу – построить пяти-, шести- и семимерный симплекс. Для этого расширим табл. 3, добавив справа еще три вертикальных столбца. Получаем количества каждого элемента искомых фигур, назвав пятимерный симплекс «интом», шестимерный – «угом», семимерный – «гобом», табл. 4.

Таблица 4. Сочетание элементов с добавлением 5-7 мерных симплексов

Обознач.	рис./ назв.									
А	пустота	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Б	точка		1	2	3	4	5	6	7	8
В	интерв.			1	3	6	10	15	21	28
Г	треуг.				1	4	10	20	35	56
Д	пирам.					1	5	15	35	70
Е	топ						1	6	21	56
Ж	инт							1	7	28
И	уг								1	8
Л	гоб									1

Основную характеристику инта, пятимерного симплекса – интиома, можно записать в виде:

$И=l^5$ (6).

Основанием инта является четырехмерный симплекс – топ с $W=l^4$. Высота инта должна быть равной $5l$. Положение вершины инта (точка 6 на рис. 5) возможно на части сферы с радиусом $5l$, ограниченной телесным трехгранным углом, симметричным относительно вершины топа (точка 5 на рис. 5), углу при вершине его. Только при этом выполняются условия девятого вертикального столбца табл. 4.

Рассматривая фигуру, можно представить инт, как своеобразный «интервал» (между точками 4 и 5, рис. 5), который, в отличие от интервала в E^1, охваченного точками 1 и 2, в E^5 охвачен шестью топами. Формально можно построить еще три инта, соответствующих каждому из остальных топов, составляющих семейство из четырех фигур.

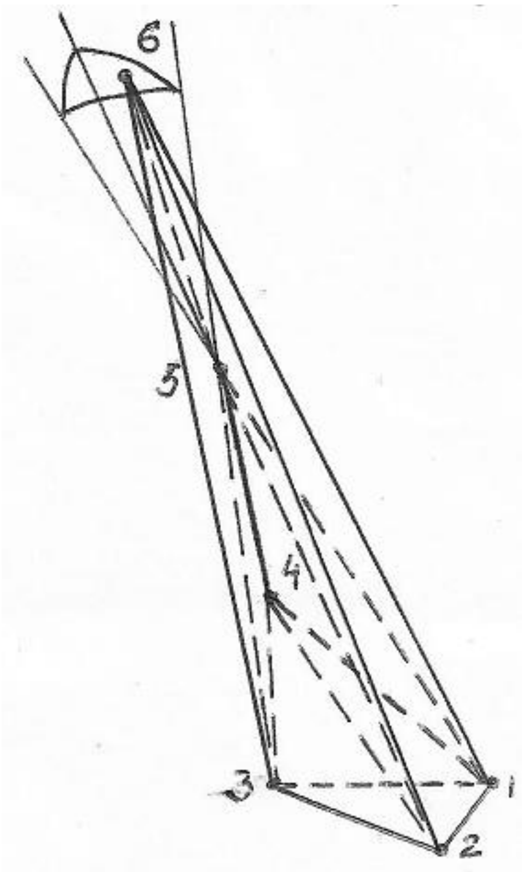


Рис. 5. Построение пятимерной фигуры

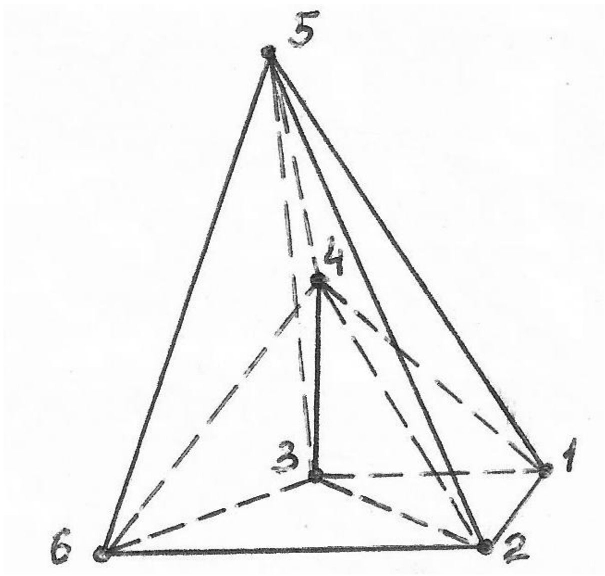


Рис. 6. Схема построения инта

Кроме того, возможно построение инта по схеме рис.6. Рассматривая эту фигуру, можно представить инт, как своеобразный «интервал» (между точками 3 и 4, рис. 6), охваченный шестью топами. Таких интов можно построить шесть, по числу ребер пирамиды. Таким образом, построение пятимерного симплекса дало семейство из десяти интов, которые имеют одинаковую характеристику $И=l^5$, но различные характеристики некоторых составляющих его элементов.

Принципы построения угов и гобов такие же, как и при построении топов и интов.

Уг можно представить, как своеобразный «треугольник», охваченный семью интами, а гоб – как своеобразную «пирамиду», охваченную восемью угами.

Построения n-мерных фигур, таким образом, не представляют теоретических затруднений, но технически выполняются каждый раз все более сложно.

Построение угов дает семейство из шестнадцати фигур с одинаковыми основными характеристиками – угиомами:

$У=l^6$ (7).

Но характеристики некоторых составляющих элементов-гобов также различны.

В дальнейшем, при построении фигур большей размерности, наблюдается периодическое повторение числа членов семейств фигур по схеме: 4-10-16-5. В результате, выполнены построения симплексов основного ряда l^n. В перспективе просматривается также возможность построения симплексов с рядовыми коэффициентами типа $l^n/n!$ и некоторых других.

Выводы.

1. Предложен метод систематизации симплексов в n-мерном Евклидовом пространстве.
2. Предложен метод построения n-мерных симплексов в E^n.
3. Выявлена необходимость учета нового элемента построения фигур – «пустоты».
4. Обобщена теорема Л. Эйлера для выпуклых многогранников на любые n-мерные симплексы в E^n.

Список литературы

1. *Гайденко П.П.* Обоснование научного знания в философии Платона. В кн. «Платон и его эпоха». М.: «Наука», 1979.
2. *Кузнецов Б.Г.* История философии для физиков и математиков. М.: «Наука», 1974. гл. 5.
3. *Рожинский И.Д.* Античная наука. М.: «Наука», 1980.

= ГОНЧАРОВ =

"16" мая 1983 года.